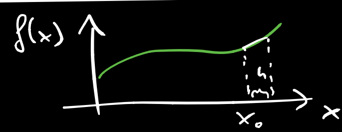
Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

- Mehrdimensionale Differentialrechnung
  - Totale Diffbarheit (oder nur diffbar)
  - Partielle Diffbarkeit (= Richtungsableitungen)
  - Diffbarkeitskriterium
  - Jacobi-Matrix
  - Diffbarkeit Implikationen
  - Gradient (Nabla-Operator)
    - Exkurs Gradient-Descent
  - Rechenregeln Diffbar.
  - Tangenten & Tangentialebenen

Totale Differenzierbarkeit / Totales Differential:

Klassisch: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$



Alternative Def.: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L \cdot h}{h} \overset{!}{=} 0$ mit $L = f'(a)$

} Analysis I Eindim.

$\Rightarrow$ Sagt aber genau dasselbe aus!

Mehrdimensional:

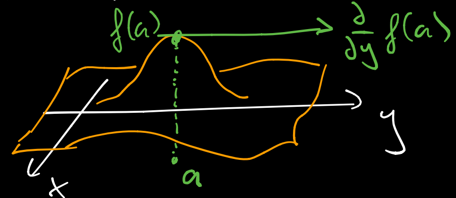
Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ heisst diffbar in $a \in U$, falls es eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so dass:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L \cdot h}{\|h\|} = 0$$

$\Rightarrow$ $L = Df = f'(a) = J$ ist eine Matrix und nennt sich das (totale) Differenzial. Wir werden noch sehen, dass $f'(a)$ im Gegensatz zu früher nun die Informationen der partiellen Ableitungen in <u>alle</u> Richtungen beinhaltet (war bei Analysis I ja gerade die einzige Richtung). Man muss das Differenzial an einem Punkt a mittels Matrixmultiplikation in eine bestimmte Richtung auswerten, um eine Steigung im klassischen Sinn wie in Analysis I zu erhalten, das werden wir noch explizit sehen.

Partielle Diffbarkeit:

Jetzt geht es um eben diese Ableitung in eine spezifische Richtung. Das kann man sich wie eine Tangente an die Funktion vorstellen:



Tangente an $f(x)$ in y-Richtung an $x=a$

Im Beispiel $v = y$

Def: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann definieren wir die ($\|v\|=1$) Richtungsableitung von $f: U \to \mathbb{C}$ in $a \in U$ in Richtung v als: $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = \frac{d}{dv} f(x) \Big|_{x=a}$$

Bem: Die Richtungsableitungen bzgl. der Standardbasis $e_1, e_2, \dots, e_n$ nennt man <u>partielle Ableitungen</u> von f in a. Existieren all diese Richtungsabl., so nennt man f in a partiell diffbar.

Notation:

$\partial_v f(a)$: Richtungsabl. in Richtung v $\hat{=} \frac{\partial}{\partial v} f(a)$

$$\partial_{e_j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} f(a)}_{\text{wird am meisten verwendet}} = f_{x_j}(a) = \partial_{x_j} f(a)$$

∂: partielle Ableitung $\quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x)$

d: totale Ableitung $\quad \frac{d}{dx} f(x)$

Satz: Ist $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in a (total) diffbar, so existieren dort auch alle Richtungsabl. und

$$\partial_h f(a) = d f(a) \cdot h = f'(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i = \underbrace{\left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\right]}_{\substack{\text{Spezialfall der} \\ \text{Jacobimatrix für} \\ \text{1-D Funktionen in} \\ \text{mehreren Variablen}}} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$\|h\| = 1$

Bem: Man sieht also sofort, dass man mit Hilfe des totalen Differenzials jede beliebige Richtungsableitung berechnen kann, in dem man das Differenzial einfach mit der Richtung multipliziert. Damit folgt direkt

(total) ableitbar $\Rightarrow$ partiell ableitbar

Bsp: $f(x,y) = \sin(2x) e^{3y}$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2 \cdot \cos(2x) e^{3y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 3 \sin(2x) e^{3y}$$

$$df = [2\cos(2x)e^{3y}, 3\sin(2x)e^{3y}]$$

Bem: Falls ihr die Funktion ableiten könnt, und die Funktion keine kritischen Punkte beinhaltet (mehrteilig definiert, Nulldivision etc.), dann ist sie total diffbar! $\Rightarrow$ Kommt nachher noch als Satz.

Bsp. Part. diffbar $\not\Rightarrow$ total diffbar !

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Partielle Abl.:</u>

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{Beide part. Ableitungen existieren}$$

$f(x,y)$ ist <u>nicht</u> stetig $\Rightarrow$ <u>nicht</u> diffbar

Stetigkeit:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0} \cos\varphi\sin\varphi \neq 0 \quad \lightning$$

Differenzierbarkeitskriterium: Wichtig!

Existieren in einer Umgebung U ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) von a alle partiellen Ableitungen von f und sind diese in a stetig, so ist f in a (total) diffbar.

Def.: Wir nennen $f: U \to \mathbb{C}$ sogar stetig diffbar, falls alle partiellen Ableitungen $\partial_1, \ldots, \partial_n f$ in U existieren und stetig sind ($\Rightarrow f$ diffbar in U)

$\leadsto$ stetig diffbar $\Rightarrow$ diffbar

$\Rightarrow$ Die Fkt. ist also stetig (total) diffbar auf dem gesamten Bereich, auf dem ihre partiellen Ableitungen stetig sind.

Vorgehen: Wie prüft man, ob f (total) diffbar ist?

(i) Part. Abl. ∂f ausrechnen

↳ existieren nicht $\Rightarrow$ nicht diffbar

↳ existieren $\Rightarrow L = [\partial_1 f \; \partial_2 f \; \ldots \; \partial_n f]$ Kandidat für die Ableitung $df(a)$

(ii) $\partial_i f$ alle stetig $\Rightarrow f$ (total) diffbar, $L = df(a)$

(iii) Falls nicht: L in Def. von totaler Abl. einsetzen und überprüfen, ob das Kriterium hält:

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L \cdot h}{\|h\|} \overset{?}{=} 0$$

Generelle Jacobi-Matrix:

Im allgemeinen Fall für mehrdimensionale Funktionen (sogenannte Vektorfelder) nimmt das Differenzial folgende Form an:

$$J = L = Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

momentan ←

für $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$

Diesen Fall werden wir erst später in der Vorlesung sehen.

<u>Implikationen:</u>

Einer der wichtigsten Punkte bei der Differentialrechnung ist es, die Übersicht über alle Implikationen zu behalten. Dies wird im Mehrdimensionalen noch etwas schwerer. Schreibt euch mindestens eine der folgenden Grafiken in eure Zusammenfassung:

(alles in einem Punkt a)

stetig diffbar

$\Downarrow \quad \Uparrow$ falls in einem Bereich um a

stetig partiell diffbar

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

diffbar

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

alle Richtungsableitungen existieren

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

partiell diffbar

$\not\Downarrow$

stetig

Differenzierbarkeitskriterium

$\partial_v f = df \cdot v = f' \cdot v = L \cdot v = J \cdot v$

Alternative:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{f \text{ ist von der Klasse } C^1 \text{ an der Stelle } x_0} \arrow[d] & \\
 & \boxed{f \text{ diffbar an der Stelle } x_0} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{f \text{ stetig an der Stelle } x_0} & & \boxed{f \text{ part. diffbar an der Stelle } x_0} \arrow[ul, bend right, "\text{part. Abl. stetig in } x_0"'] \arrow[uul, bend right, "\text{Part. Abl. sind stetig in einer Umgebung von } x_0"']
\end{tikzcd}$$

Bsp:

$$f(x,y) = \frac{\sin(e^x y)}{e^{x+y} + 1}$$

Komposition stetig diffbarer Funktionen $\rightsquigarrow$ stetig diffbar

Bsp:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$x^2y^2 \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$$

(i) Partielle Abl.:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$\rightsquigarrow$ unbedingt Symmetrie von $f(x,y)$ ausnutzen!

$$\Rightarrow \quad J = L = Df = \left[\frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

(ii) Part. Abl. stetig?

Offensichtlich sind die part. Abl. $\overset{\text{als Komp. stetiger Fkt}}{\vee}$ stetig überall ausser $(x,y) = (0,0)$, das muss näher betrachtet werden:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial x} f \overset{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}}{\underset{\vee}{=}} \lim_{r\to 0} \frac{2r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} - \frac{2r^5\cos^3\varphi\sin^2\varphi}{r^4(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2}$$

$$= \underline{0}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial y} f = \underline{0}$ aus Symmetriegründen

Das sieht schon einmal sehr vielversprechend aus, die partiellen Ableitungen wären sicher einmal stetig fortsetzbar in $(0,0)$, jetzt müssen wir aber noch überprüfen, ob die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ auch wirklich mit der Umgebung übereinstimmen, wir berechnen also konkret:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0 \cdot h^2}{h^2} - 0}{h} = \underline{0}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \underline{0}$$

Somit haben wir gezeigt, das die part. Ableitungen in $(0,0)$ tatsächlich stetig sind:

$\Rightarrow$ Partielle Abl. sind stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ ist <u>stetig diffbar</u> auf $\mathbb{R}^2$

<u>Gradient:</u>

Der Gradient ist ein weiterer neuer Rechenoperator für mehrdimensionale Funktionen. Er wird auf ein "Skalarfeld" (1D-Funktion) angewendet und liefert ein "Vektorfeld" (mehrdimensionale Funktion). Mehr zu den Feldtypen später. Der Gradient wird mit dem "Nabla"-Operator "∇"

gekennzeichnet. Achtung, <u>keine</u> Multiplikation.
Wir werden später auch noch sehen, dass man mit dem Nabla-Operator ebenfalls normal rechnen kann, und werden sehen, was dies bedeutet.
Der Gradient als Vektor hat die Eigenschaft, dass er immer in Richtung der grössten Steigung zeigt. Somit kann er später für diverse Optimierungsprobleme eingesetzt werden (Stichwort "Gradient-Descent").

<u>Def:</u>

$$\nabla f(a) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f(a) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(a) \end{bmatrix}, \quad \nabla = \text{"Nabla"}$$

$$\Rightarrow \quad df(a)\cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Tangentialebene:

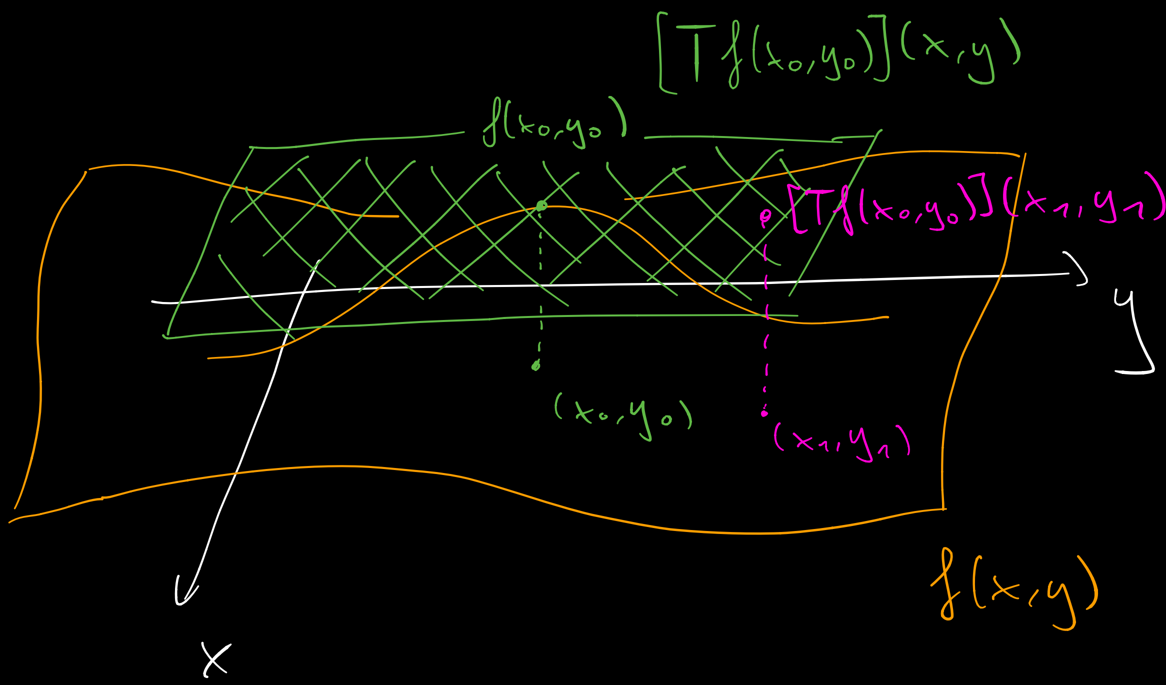
Eine Tangente bzw. Tangentialebene, -raum, etc. in einem gewissen Punkt (x_0,y_0) der Funktion ist gegeben durch den Funktionswert an der Stelle $f(x_0,y_0)$ und entsprechend der Anforderung eine, zwei bzw. drei oder mehr Richtungsableitungen, welche den Tangentialraum aufspannen. Richtungsableitungen werden wie gelernt mithilfe des (totalen) Differenzials und der entsprechenden Richtung gebildet. Beispiel Tangentialebene:

$$[Tf(x_0,y_0)](x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_0}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{y_0}(y-y_0)$$

$$= f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0)\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

Bem: Achtung, die Ebene ist eine Funktion in x & y, x_0 & y_0 geben nur an, wo die Ebene die Funktion im

Raum berührt.



$\Rightarrow$ Wir können z.B. den Punkt (x_1,y_1) auf der Tangentialebene, welche im Punkt (x_0,y_0) an die Funktion anliegt, auswerten. Dies ist oben dargestellt.